References

1) D. Callaway and A. Rahman, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 613.
M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 1411.
J. Polony and H. W. Wyld, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 2257.
2) U. M. Heller and N. Seiberg, Phys. Rev. **D27** (1983), 2980.
3) A. Iwazaki, Phys. Lett. **141B** (1984), 342.
4) G. Bhanot, Nucl. Phys. **B205** [FS5] (1982) 168.
5) Y. Morikawa and A. Iwazaki, Phys. Lett. **165B** (1985), 361.

カオスの結合敏感性
(Coupling Sensitivity of Chaos)

九工大・物理　大同寛明

§ 1. まえおき

カオスとは何であるかをより深く理解するためには，ただ眺めているだけでは駄目で，何か小さな摂動を加えて，それへの応答を調べることが重要である。例えば，平衡系に弱い外場を加えてその応答を調べると，オンサガーの相反法則などの平衡系に固有の性質が見い出されることはよく知られている。同じような意味で，カオスの応答を通して，カオスを特徴づけることができるはずである。もちろん，摂動といっても色々の場合が考えられる。その一つの例は雑音である。いくつかの典型的な一次元写像系のカオス状態でのKエントロピーは，雑音に対して巾法則で変化（応答）することが，数値的に見い出されている。[1] この報告では，等価なカオス系を結合した場合のリヤプノフ指数の変化（応答）について考える。現実にあるどのような物理系も局所的な少数自由度が相互に結合したものと見なせることを考えると，結合という摂動に対するカオスの応答を調べることは有意義であろう。又，リヤプノフ指数はカオスを定量的に特徴づける最も基本的な量である。そこで，リヤプノフ指数という〝窓〟を通してカオスの結合に対する応答ぶりをのぞいてみることにする。理論[†]もあるが，この報告では，数値計算の結果を招介するにとどめる。カオスは結合に対して異常に敏感であるというのが結論で

†) to be published.

ある。

§ 2. 一次元カオスの応答[2)]

まず最も簡単な場合として，カオスを生ずる一次元写像系 $X' = F(X)$ (そのリヤプノフ指数を $L > 0$ とする) を次のように結合する場合を考える。

$$X' = F(X) + d \cdot D(Y, X)$$
$$Y' = F(Y) + d \cdot D(X, Y)$$

ここで d は結合強度を表わすパラメーターである。この2次元写像系のリヤプノフ指数を $L_1(d)$，$L_2(d)$ ($L_1(d) \geq L_2(d)$) とすると，定義により，$L_1(0) = L_2(0) = L$ である。この二重縮退は結合によってどのように破れるであろうか？図1に，$F(X) = 3.7\,X(1-X)$，$D(Y, X) = Y - X$ に対して数値計算により得られた結果を示す。この図で，次の記法が使われている。$\Delta = L_1 - L_2$，$\Delta^{-1} = 1/\Delta$，$\Delta' = L_1 + L_2 - 2L$，そして $\log = \log_{10}$。まず(a)より，d が小さ

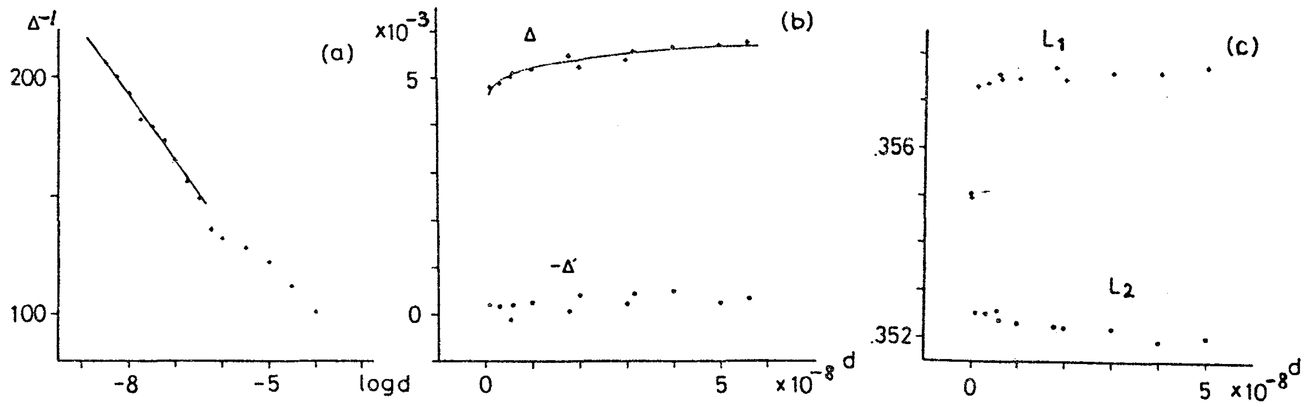

図　1

いとき，$\Delta \propto 1/-\ln d$ であることがわかる。他方，(b)から，リヤプノフ指数の和 (つまり Δ') は，小さな d に対して殆んど不変であることが知れる。つまりこれらの数値計算の結果は次のことを示唆する。

$$L_i(d) - L \cong c_i / -\ln d \quad (i = 1, 2) \qquad (*)$$

ここで $c_2 = -c_1$ である。次のことが重要である。

(i) L_i の応答は d のどんな巾法則よりも速い。

(ii) L_1 と L_2 の応答は L に関して対称。

これらは図1(c)からも了解される。(*)は他の多くのFとDについても数値的に確認された。従って(*)はカオスの十分に普遍的な性質であると期待できる。これをCoupling Sensitivity of Chaos とよぼうという訳である。(*)はカオスの応答という視点とは別に，結合系におけるスケーリング則としても興味深い。

§ 3. 高次元カオスの応答[3)]

物理的には高次元力学系におけるカオスの応答を調べることがより重要である。この最も簡単な場合として，次のような結合 Hénon 系について調べた結果を図2に示す。

$$
\begin{aligned}
X' &= 1 - aX^2 + Y + d\cdot(Z - X) \\
Y' &= bX + 0.6\, d\cdot(W - Y) \\
Z' &= 1 - aZ^2 + W + d\cdot(X - Z) \\
W' &= bZ + 0.6\, d\cdot(Y - W)
\end{aligned}
$$

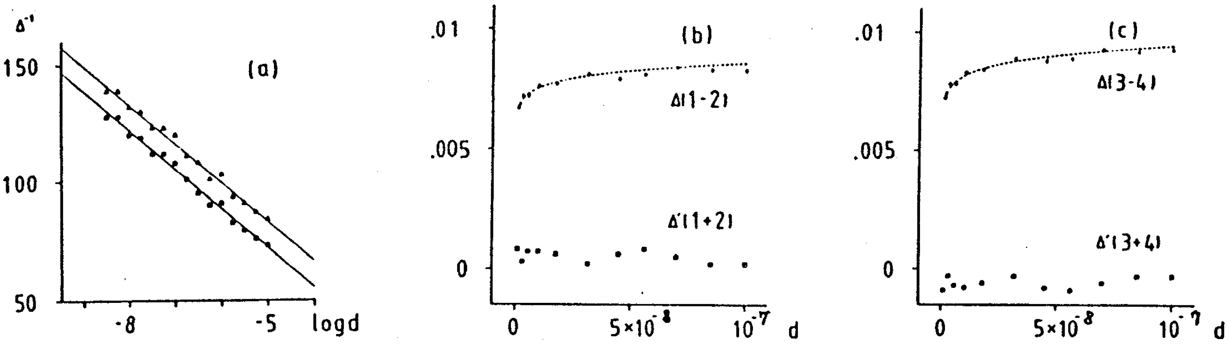

図　2

但し，$a = 1.4$，$b = 0.3$ である。図2において，$\varDelta(1-2) = L_1 - L_2$，$\varDelta(3-4) = L_3 - L_4$，$\varDelta'(1+2) = L_1 + L_2 - 2\hat{L}_1$，$\varDelta'(3+4) = L_3 + L_4 - 2\hat{L}_2$ である。（$L_1 \geq L_2 \geq L_3 \geq L_4$ は上の四次元写像系のリヤプノフ指数。又，$\hat{L}_1 \geq \hat{L}_2$ はもとの二次元系のリヤプノフ指数である。$L_1(0) = L_2(0) = \hat{L}_1$，$L_3(0) = L_4(0) = \hat{L}_2$ に注意。）なお，図2(a)の上のデータは $\varDelta(1-2)^{-1}$ を，そして下が $\varDelta(3-4)^{-1}$ を，それぞれ示している。図1の場合と同様なので詳しい説明は省くが，次の結果をうる。小さなdに対し

$$
\left.
\begin{aligned}
L_i(d) - \hat{L}_1 &\cong c_i / -\ln d \qquad (i = 1,\ 2) \\
L_i(d) - \hat{L}_2 &\cong c_i / -\ln d \qquad (i = 3,\ 4)
\end{aligned}
\right. \qquad (**)
$$

ここで $c_2 = -c_1$，$c_4 = -c_3$ であり，かつ，$c_1 = c_3$ である。つまり，次のことがわかる。

(iii) (L_1 , L_2) と (L_3 , L_4) の両ペアーのそれぞれについて(*)が成立し，かつ，縮退の破れの深さは両ペアーで共通の大きさを持つ。

$a=1.4$， $b=0.3$ の Hénon 系では $\hat{L}_1>0$， $\hat{L}_2<0$ であるから，小さな d については， L_1， $L_2>0$， L_3，$L_4<0$ である。正のリヤプノフ指数のみならず，負のリヤプノフ指数も敏感なのである。さらに次のこともわかる。

$$D_L(d)-D_L(0)\cong c'/-\ln d \qquad (***)$$

ここで D_L は結合系のアトラクターのリヤプノフ次元である。

§ 4. おしまいに

§ 3 の結果は任意次元のカオスについても成立するものと推測されるが，理論はまだない。上で見てきたように，カオスは，結合に対して著しく簡単で，〝美しい〟(少くとも私には) 応答を示す。これの科学的意義は果たして何であろうか？更なる努力が必要である。

1) J. P. Crutchfield and N. H. Packard, Physica **7D** (1983), 201.
2) H. Daido, Prog. Theor. Phys. **72** (1984), 853 and **73** (1985), 310 (E); Prog. Theor. Phys. Suppl. **79** (1984), 75.
3) H. Daido, Phys. Lett. **110A** (1985), 5.

カオスの摂動論的アプローチ

国士館大・工　清 水 敏 寛

非線型微分方程式系でその時間発展が記述できるような系のカオスの統計的性質を調らべようとする場合，広い意味での粗視化の手続きが重要となる。従来この粗視化は，ローレンツプロットやポアンカレマップを通して行なわれている。平衡状態の近くでの力学を議論する時には，最も確からしい軌道とそのまわりのゆらぎという形に時間発展を分けることが有効であった。カオスの場合には，これ程簡単にはいかないが別の意味での分解が可能である。粗視化ができた場合には，単に解析が容易になるばかりでなく，カオス発生の機構や，カオスの確率的解釈にとってたいへん有益である。